ANWENDUNG DER STATISTIK IN DER PRAXIS :

Q U A L I T Ä T S R E G E L K A R T E N

Monika Weiss, TGM Wien

Im Volksmund versteht man unter Qualitätswaren solche, die sehr hohen Ansprüchen genügen. Oft sieht man sie im Gegensatz zum Massenartikel.

Die in der der Industrie verwendete ÖVQ-Definition[1] lautet:

> Qualität ist die Gesamtheit von Eigenschaften und Merkmalen eines Produktes oder einer Tätigkeit, die sich auf deren Eignung zur Erfüllung gegebener Erfordernisse beziehen.
>
> Anmerkung 1: Die Erfordernisse ergeben sich aus dem Verwendungszweck des Produktes oder dem Ziel der Tätigkeit unter Berücksichtigung der Realisierungsmöglichkeiten.
>
> Anmerkung 2: Ein Produkt ist z.B. jede Art von Waren, Rohstoffen, aber auch der Inhalt von Konzepten und Entwürfen. Eine Tätigkeit ist z.B. jede Art von Dienstleistung, aber auch ein maschineller Arbeitsablauf wie ein Verfahren oder Prozeß.
>
> Anmerkung 3: Von der Verwendung der Benennung "Güte" synonym zu "Qualität" wird mit Rücksicht auf die internationale Normung abgeraten. Wird "Güte" benutzt - wie vielfach im behördlichen Bereich -, soll diese Benennung nur als Synonym zu "Ausführungsqualität" verwendet werden.
>
> Anmerkung 4: Qualität wird durch alle Qualitätsanteile im Qualitätskreis bestimmt.
>
> Anmerkung 5: Die Erfordernisse schließen in der Regel auch Sicherheit, Umweltschutz und angemessenen Mitteleinsatz ein.

Wir sehen: Qualität ist auf vorgegebene Erfordernisse bezogen. Es gibt keinen absoluten Maßstab für Qualität. In diesem Sinn können sowohl einfache Filzpantoffel als auch teure Schistiefel, weiters sowohl eine billige Fotobox als auch eine teure Spiegelreflexkamera Qualitätserzeugnisse sein. Ausschlaggebend ist der Verwendungszweck.

Man teilt in der Praxis den Begriff "Qualität" in "Planungsqualität" (Festlegung der Sollwerte) und "Ausführungsqualität" (Übereinstimmung der Istwerte mit den Sollwerten).

Ein Mittel zur Überwachung der Ausführungsqualität sind <u>Qualitätsregelkarten</u>.

[1] ÖVQ = Österreichische Vereinigung für Qualitätssicherung

<u>Beispiel:</u> Wir betrachten eine Serienfertigung von Bolzen; pro Stunde werden 5 000 Bolzen erzeugt. Ihre Länge soll 105 mm betragen.

Durch zufällige Ursachen, also Ursachen, die dem Fertigungsprozeß eigentümlich und daher unvermeidlich sind, treten Schwankungen der Länge auf.

Auch dem Konstrukteur ist bekannt, daß nicht alle Längen exakt 105,00... mm betragen können. Er gibt daher nach technisch-wirtschaftlichen Gesichtspunkten vor, wie groß die Abweichungen vom Sollwert sein dürfen.

In unserem Fall laute die Spezifikation des Längenmaßes (105 ± 0.6) mm

Die obere Toleranzgrenze beträgt somit:		TO = 105.6 mm
Die untere Toleranzgrenze	:	TU = 104.4 mm
Die Toleranz	:	T = TO - TU = 1.2 mm

Ein Bolzen wird genau dann als fehlerhaft betrachtet, wenn seine Länge außerhalb der Toleranzgrenzen liegt.

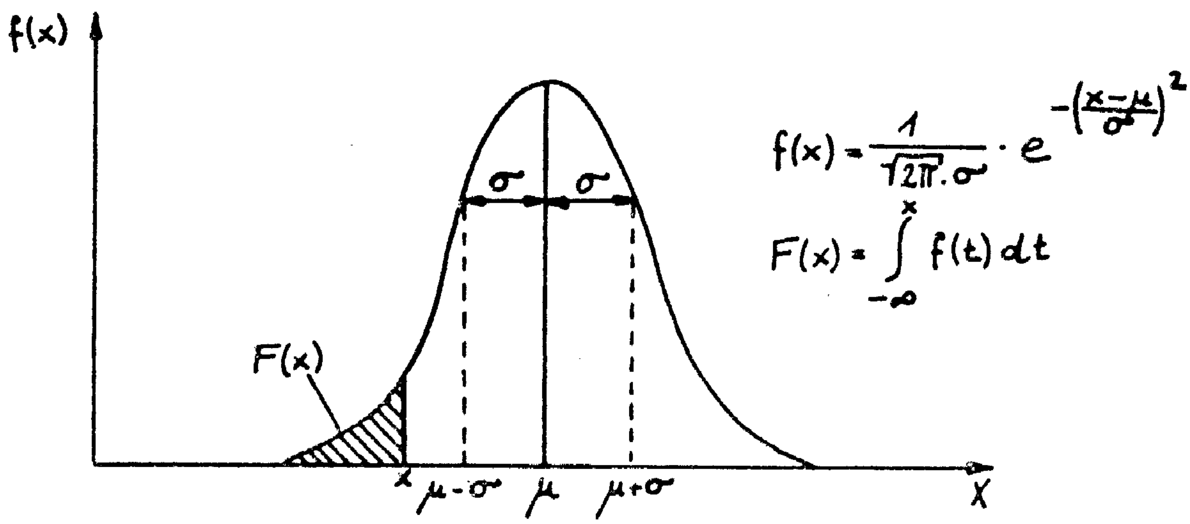
<u>Beachten Sie:</u>

Nur <u>unzulässige</u> Abweichungen vom Sollwert werden als Fehler bezeichnet.

Nachdem wir den Sollzustand durch Angabe des Toleranzbereichs festgelegt haben, müssen wir uns nun eingehend mit dem Istzustand beschäftigen. Wir beschreiben ihn mit Hilfe von Begriffen der Statistik.

So können wir die Länge X als Zufallsvariable auffassen.

Weil mehrere voneinander unabhängige Ursachen verschieden große, aber jeweils kleine Veränderungen hervorrufen, dürfen wir die Länge X als normalverteilt mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ betrachten.



f heißt Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und F Verteilungsfunktion.

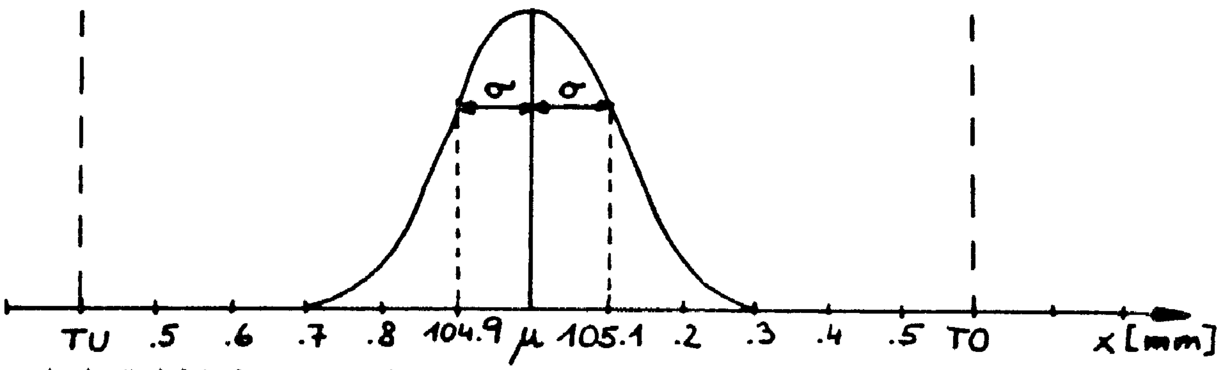
Die Werte der Länge X streuen um den Mittelwert μ und zwar umso stärker, je größer die Standardabweichung σ ist.

So liegen	68.26 % aller Werte innerhalb	$\mu \pm 1\sigma$
	95.44 %	$\mu \pm 2\sigma$
	99.73 %	$\mu \pm 3\sigma$
	99.99 %	$\mu \pm 4\sigma$
	99.999 9 %	$\mu \pm 5\sigma$
	99.999 999 8 %	$\mu \pm 6\sigma$

Der Anteil fehlerhafter Bolzen ist dann am kleinsten, wenn der Mittelwert μ der Verteilung mit der Toleranzmitte $M = (TO + TU)/2 = 105$ mm übereinstimmt.

Die Standardabweichung σ der Verteilung soll in einem "sinnvollen" Verhältnis zur Toleranzvorgabe stehen. Die Erfahrung hat gezeigt, daß eine Fertigung nur dann problemlos ablaufen kann, wenn $T \geq 10\ \sigma$, im Idealfall $T \geq 12\ \sigma$ ist.

Soll der Anteil fehlerhafter Bolzen über längere Zeiträume klein sein, müssen wir darauf achten, daß die Standardaweichung σ ungefähr $T/12 = 1.2/12 = 0.1$ beträgt. σ hängt hauptsächlich vom Fertigungsprozeß und vom verwendeten Material ab und ist meistens über längere Zeiträume konstant.



Wenn wir tatsächlich erreichen, daß die Verteilung der Länge X einen Mittelwert $\mu = 105$ mm und eine Standardabweichung $\sigma = 0.1$ mm aufweist, ist der Anteil fehlerhafter Bolzen, also Bolzen mit einer Länge außerhalb des Toleranzbereichs, verschwindend klein (0.000 000 2 %). Bei einer jährlichen Arbeitszeit von 50 Wochen zu 40 Stunden würde das für die von uns betrachtete Bolzenfertigung bedeuten, daß in 100 Jahren im Mittel 2 fehlerhafte Bolzen auftreten.

Durch verschiedene überzufällige Einflüsse, z.B. durch Abnützung des Werkzeugs verändert sich jedoch allmählich der Mittelwert der Verteilung, wodurch mehr fehlerhafte Bolzen auftreten. Eine Neueinstellung der Maschine kann dann Abhilfe schaffen.

Mit Hilfe der Statistik müssen wir nun das folgende Problem lösen: Wann soll ein derartiger regelnder Eingriff erfolgen?

Einerseits natürlich möglichst früh, damit der Fehleranteil nicht zu groß wird. Andererseits nicht zu oft, damit der Fertigungsprozeß nicht öfter als unbedingt notwendig unterbrochen wird.

Um entscheiden zu können, ob regelnd eingegriffen werden soll, muß der Istzustand der Fertigung überwacht werden. Eine Prüfung aller 5 000 in einer Stunde gefertigter Bolzen ist zu zeit- und kostenaufwendig. Man muß sich wohl darauf beschranken die Lange einiger zufällig entnommener Bolzen zu messen. Allgemein ublich ist ein Stichprobenumfang von n = 5 Stücken.

Das Resultat der Stichprobenprüfung hangt nicht nur von der momentanen Verteilung, sondern auch vom Zufall ab.

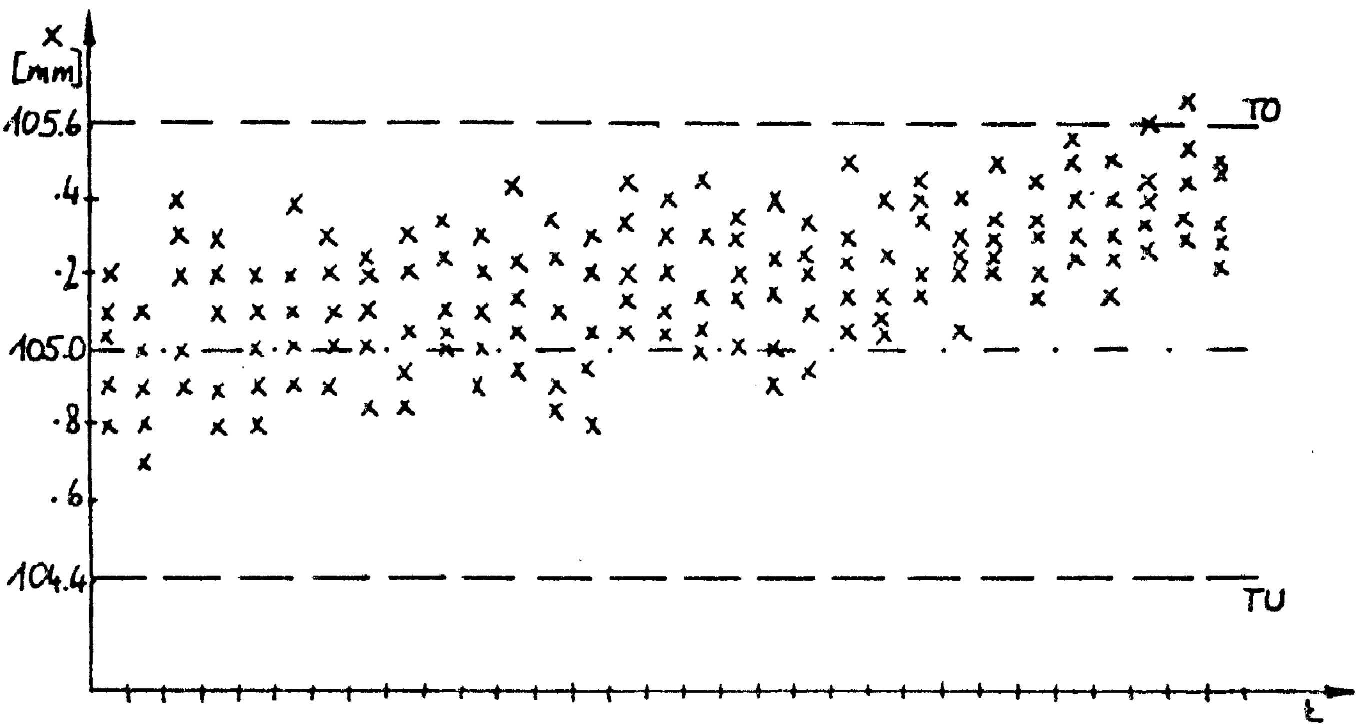
Wie kann man dennoch bei so kleinem Stichprobenumfang aus dem Prüfresultat Rückschlüsse auf den momentanen Fehleranteil in der Produktion schließen und so entscheiden, ob in den Prozeß eingegriffen werden muß?

Um trotz aller zufälliger Schwankungen einen etwaigen Trend erkennen zu können, muß in regelmäßigen, nicht allzu großen Zeitabständen geprüft und das Resultat möglichst übersichtlich festgehalten werden. Dazu eignet sich eine graphische Darstellung auf kariertem Papier: Die einfachste Form einer Qualitätsregelkarte.

Auf der horizontalen Achse werden die Zeitpunkte der Stichprobenentnahme eingetragen. Für die vertikale Achse wird ein passender Maßstab für die Meßwerte, bei uns ein Längenmaßstab etwa von 104 mm bis 106 mm gewählt.

Bei jeder Stichprobenprüfung werden die fünf Meßwerte in der Regelkarte über dem entsprechenden Zeitpunkt eingetragen. Zur besseren Übersicht wird zusätzlich der Toleranzbereich durch zwei horizontale Geraden markiert, eventuell auch die Toleranzmitte.

So erhält man ein anschauliches Bild des Fertigungsprozesses in einem bestimmten Zeitabschnitt, das später außerdem für Dokumentationszwecke verwendet werden kann.



Wir erkennen einen Trend: Der Mittelwert μ der Verteilung wird allmählich größer. Wir wissen, daß durch diese Verschiebung auch der Fehleranteil größer wird.

Wir kennen leider nicht den momentanen Fehleranteil und können daher nicht beurteilen, ob die Maschine bereits neu eingestellt werden muß.

> Qualitätssicherung bedeutet nicht das Suchen, sondern das Vermeiden von Fehlern.

Es genügt daher sicher nicht, erst dann einzugreifen, wenn in der Stichprobe ein Bolzen außerhalb des Toleranzbereichs gefunden wird. Wenn bereits einer der fünf geprüften Bolzen fehlerhaft ist, muß man mit einem beträchtlichen Anteil fehlerhafter Bolzen in der gesamten Fertigung rechnen.[1]

Es fehlt noch ein Entscheidungkriterium, das einfach zu handhaben ist und eindeutig angibt, wann in den Prozeß regelnd eingegriffen werden muß, bevor ein großer Anteil fehlerhafter Bolzen entsteht.

Es liegt nahe, für die Prüfung engere Grenzen als die Toleranzgrenzen einzuführen. Diese Grenzen heißen Eingriffsgrenzen. Sie werden ebenfalls in die Qualitätsregelkarte eingezeichnet.

Es gilt folgende Vereinbarung:
In den Prozeß muß immer dann eingegriffen werden, wenn mindestens ein Meßwert der Stichprobe außerhalb der Eingriffsgrenzen liegt.

Die Anwendungsregel für die Fertigungsüberwachung mittels Qualitätsregelkarten lautet:

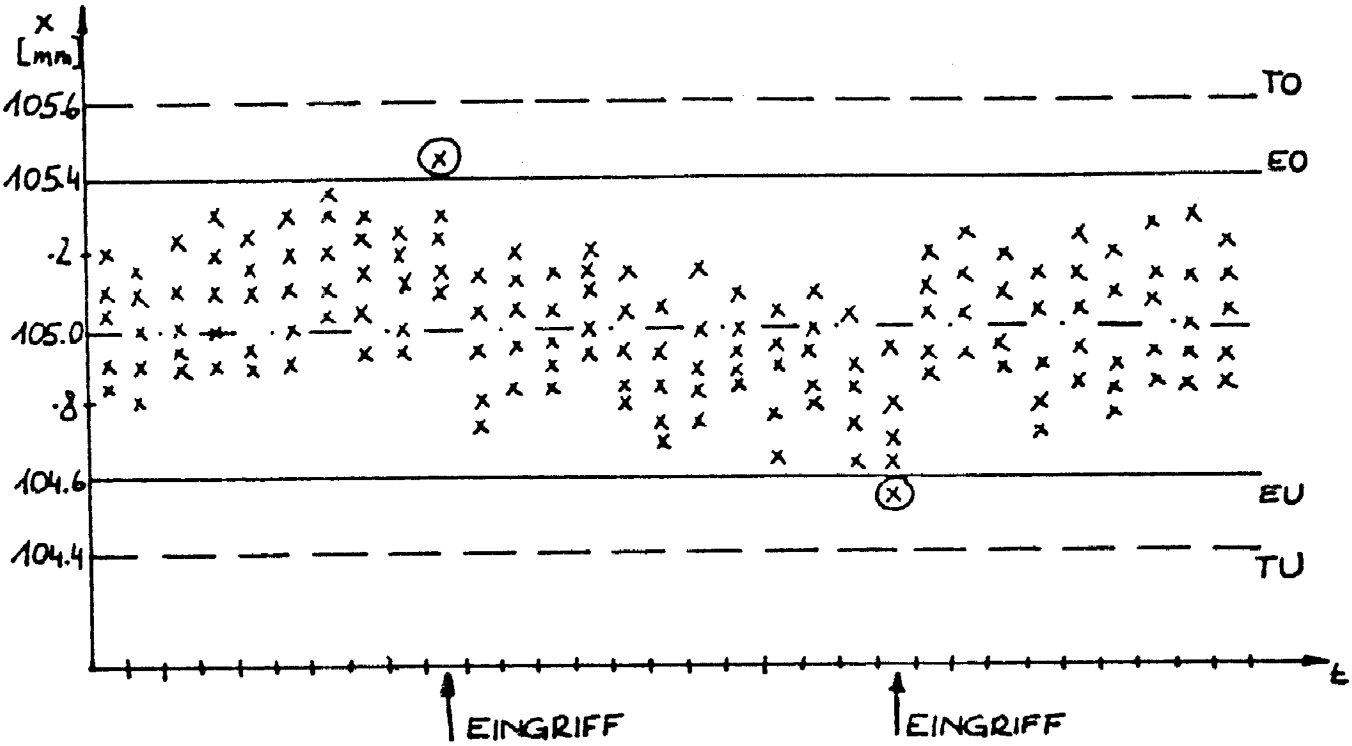
1) In regelmäßigen Zeitabständen[2] werden stets gleich große Stichproben entnommen.
Wir wählen zum Beispiel einen Stichprobenumfang n = 5.

2) Die Länge der 5 Bolzen wird gemessen und in die Regelkarte in der entsprechenden Spalte eingetragen.

3) Liegen alle 5 Maßwerte zwischen den Eingriffsgrenzen, so wird weiter gefertigt.
Tritt aber auch nur ein Meßwert außerhalb der Eingriffsgrenzen auf, so muß in den Fertigungsprozeß regelnd eingegriffen werden. (Und dies ganz unabhängig davon, ob dieser Meßwert noch im Toleranzbereich liegt oder nicht!!!)

[1] Der momentane Fehleranteil in der Fertigung liegt mit 95 %iger Wahrscheinlichkeit zwischen 0.5 % und 71.4 % und hat einen Erwartungswert von 20 %.

[2] Die Zeitabstände können zwischen wenigen Minuten und einigen Stunden liegen. Sie werden beim Anlegen der Qualitätsregelkarte unter Berücksichtigung der Art des Fertigungsprozesses und der Erfahrungen, die über seine Anfälligkeit vorliegen, sowie der Prüfkosten festgelegt. Es ist auch möglich, nicht in bestimmten Zeitabständen, sondern jeweils nach einer bestimmten Anzahl gefertigter Stücke zu prüfen.



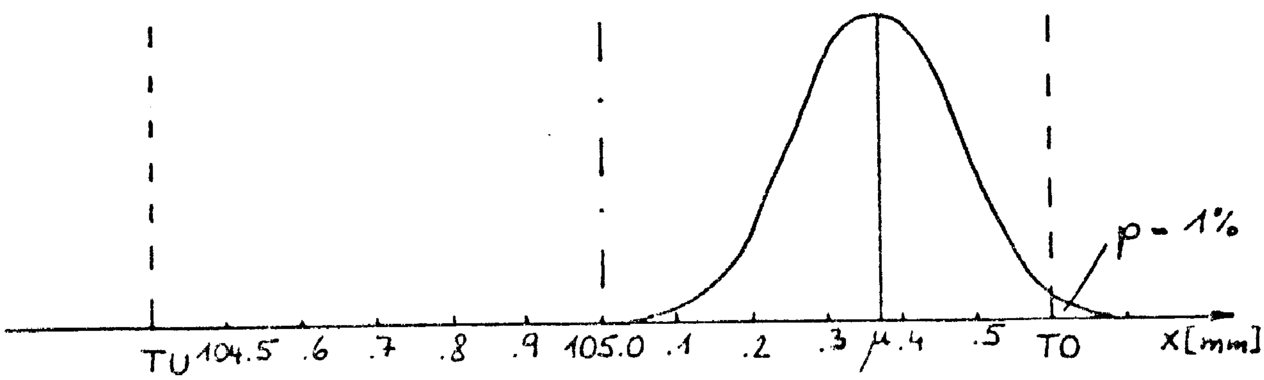
Ob und wie oft ein Eingriff erfolgt, hängt nicht nur von der momentanen Verteilung, sondern auch wesentlich von der Wahl der Eingriffsgrenzen ab.

Wir wollen uns daher jetzt damit beschäftigen, wie diese so bestimmt werden, daß sie dem Wunsch entsprechen, daß bei einem Fehleranteil von $p = 1$ % fast immer eine Neueinstellung der Maschine erfolgt (z.B. mit einer Wahrscheinlichkeit $P_E = 90$ %). P_E heißt <u>Eingriffswahrscheinlichkeit</u>.

Ein <u>Fehleranteil</u> $p = 1$ % bedeutet:
Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Meßwert außerhalb der <u>Toleranzgrenzen</u> gefunden wird, beträgt $p = 0.01$.
Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Meßwert innerhalb der <u>Toleranzgrenzen</u> gefunden wird, beträgt dann $1-p = 0.99$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir nur die obere Toleranzgrenze.

Wir fragen: Für welche Normalverteilung mit $\sigma = 0.1$ mm ist der Anteil der Werte $\leq$ TO $= 105.6$ mm gleich 99 % ?



Die Tabelle der Normalverteilung zeigt, daß beim Schwellenwert

$$u_{1-p} = u_{0.99} = 2.33$$

die Standardnormalverteilungsfunktion den Wert 0.99 annimmt. (siehe nächste Seite)

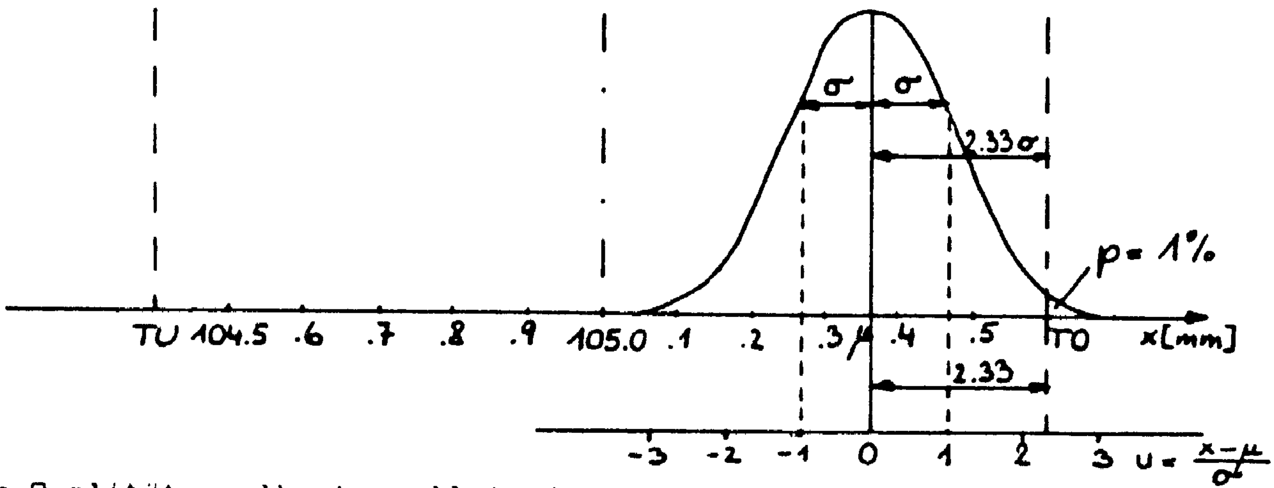
Der Fehleranteil p = 1 % tritt auf, wenn

$$TO = \mu + 2.33\,\sigma \qquad \text{gilt.}$$

Daraus folgt:

$$\mu = TO - 2.33\,\sigma = (105.6 - 0.233)\text{mm} = 105.367\text{mm}$$

$$\underline{\mu = 105.367\text{mm}}$$



Die Qualitätsregelkarte soll in diesem Fall ($p = 1$ %, $\mu = 105.367$ mm, $\sigma = 0.1$ mm) mit 90 %-iger Wahrscheinlichkeit einen <u>Eingriff</u> veranlassen. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Meßwert außerhalb der <u>Eingriffsgrenzen</u> liegt, soll $P_E = 90$ % betragen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß alle 5 Meßwerte innerhalb der Eingriffsgrenzen liegen beträgt dann 10 % .

Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, daß ein einzelner Meßwert innerhalb der Eingriffsgrenzen liegt, mit P_1.

Die Wahrscheinlichkeit, daß <u>sowohl</u> der 1. <u>als auch</u> der 2. <u>als auch</u> die übrigen Meßwerte innerhalb der Eingriffsgrenzen liegen, kann mit Hilfe des <u>Multiplikationssatzes</u> berechnet werden:

$$1 - P_E = L = P_1 \cdot P_1 \cdot P_1 \cdot P_1 \cdot P_1 = (P_1)^5$$

Daraus folgt:

$$P_1 = \sqrt[5]{L} = \sqrt[5]{1 - P_E} = \sqrt[5]{0.1} = 0.63$$

Der Tabelle der Normalverteilung entnehmen wir:

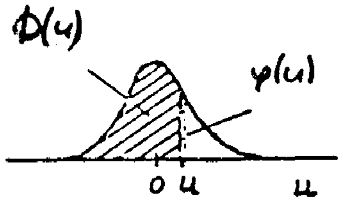
$$u_{P1} = u_{\sqrt[5]{L}} = u_{0.63} = 0.334$$

Somit:

$$EO = \mu + 0.33\,\sigma = (105.367 + 0.033)\text{mm} = 105.4\text{ mm}$$

$$\underline{EO = 105.4\text{ mm}}$$

Normalverteilung



1. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\varphi(u)$ und Verteilungsfunktion $\Phi(u)$

u	$\varphi(u)$	$\Phi(u)$
0	0,39894	0,50000
0,1	0,39695	0,53983
0,2	0,39104	0,57926
0,3	0,38139	0,61791
0,4	0,36827	0,65542
0,5	0,35207	0,69146
0,6	0,33322	0,72575
0,7	0,31225	0,75804
0,8	0,28969	0,78814
0,9	0,26609	0,81594
1,0	0,24197	0,84134
1,1	0,21785	0,86433
1,2	0,19419	0,88493
1,3	0,17137	0,90320
1,4	0,14973	0,91924
1,5	0,12952	0,93319
1,6	0,11092	0,94520
1,7	0,09405	0,95543
1,8	0,07895	0,96407
1,9	0,06562	0,97128
2,0	0,05399	0,97725

u	$\varphi(u)$	$\Phi(u)$
2,1	0,04398	0,98214
2,2	0,03547	0,98610
2,3	0,02833	0,98928
2,4	0,02239	0,99180
2,5	0,01753	0,99379
2,6	0,01358	0,99534
2,7	0,01042	0,99653
2,8	0,00792	0,99744
2,9	0,00595	0,99813
3,0	0,00443	0,99865
3,1	0,00327	0,99903
3,2	0,00238	0,99931
3,3	0,00172	0,99952
3,4	0,00123	0,99966
3,5	0,00087	0,99977
3,6	0,00061	0,99984
3,7	0,00042	0,99989
3,8	0,00029	0,99993
3,9	0,00020	0,99995
4,0	0,00013	0,99997

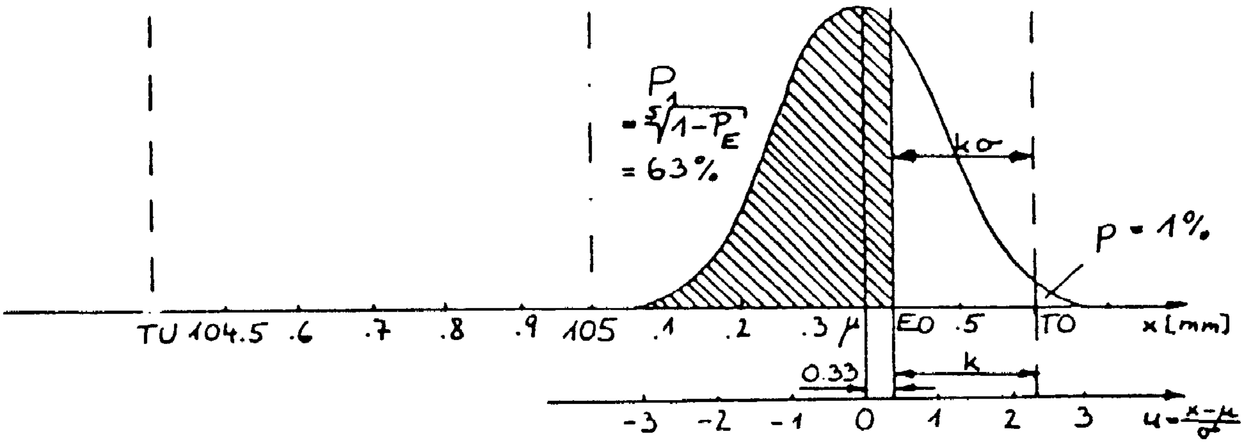
2. Obere Schwellenwerte für ausgewählte Werte von Φ

Φ	u
0,9000	1,282
0,9500	1,645
0,9750	1,960
0,9900	2,326
0,9950	2,576
0,9975	2,807
0,9990	3,090
0,9995	3,291

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\Phi(u) = F(x)$$

$$\varphi(u) = f(x)\cdot\sigma$$



Zwischen oberer Toleranzgrenze TO und oberer Eingriffsgrenze EO besteht folgender Zusammenhang:

$$TO = \mu + 2.33\ \sigma$$
$$EO = \mu + 0.33\ \sigma$$

Daher:

$$\underline{EO = TO - 2\ \sigma}$$

Analog:

$$\underline{EU = TU + 2\ \sigma}$$

Obwohl wir die Formel für unser spezielles Beispiel abgeleitet haben, ist sie immer dann gültig, wenn bei einem Fehleranteil $p = 1\ \%$ die Eingriffswahrscheinlichkeit $P_E = 90\ \%$ betragen soll und ein Stichprobenumfang $n = 5$ vereinbart ist.

Als Verallgemeinerung erhalten wir folgende Formeln zur Bestimmung der Eingriffsgrenzen einer Qualitätsregelkarte für den Stichprobenumfang n, die bei einem Fehleranteil p eine Nichteingriffswahrscheinlichkeit $L = 1 - P_E$ hervorruft:

$$EO = TO - k \cdot \sigma$$
$$EU = TU + k \cdot \sigma$$
$$\text{mit } k = u_{1-p} - u_{\sqrt[n]{L}}$$

k heißt Abgrenzungsfaktor.
u_{1-p} und $u_{\sqrt[n]{L}}$ liegen tabelliert vor (siehe nächste Seite).

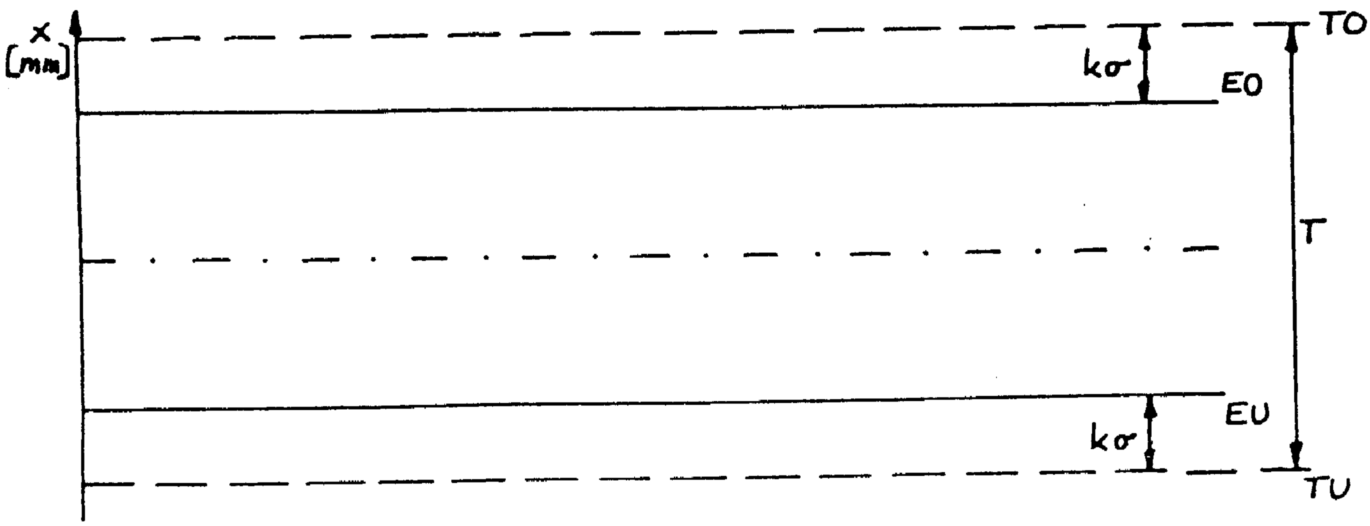


Tabelle 6: FAKTOREN u_{1-p} zur Festlegung von GRENZEN mit einem FEHLERANTEIL p einseitig außerhalb

p %	0,1	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	10,0
u_{1-p}	3,090	2,576	2,326	2,054	1,881	1,751	1,645	1,282

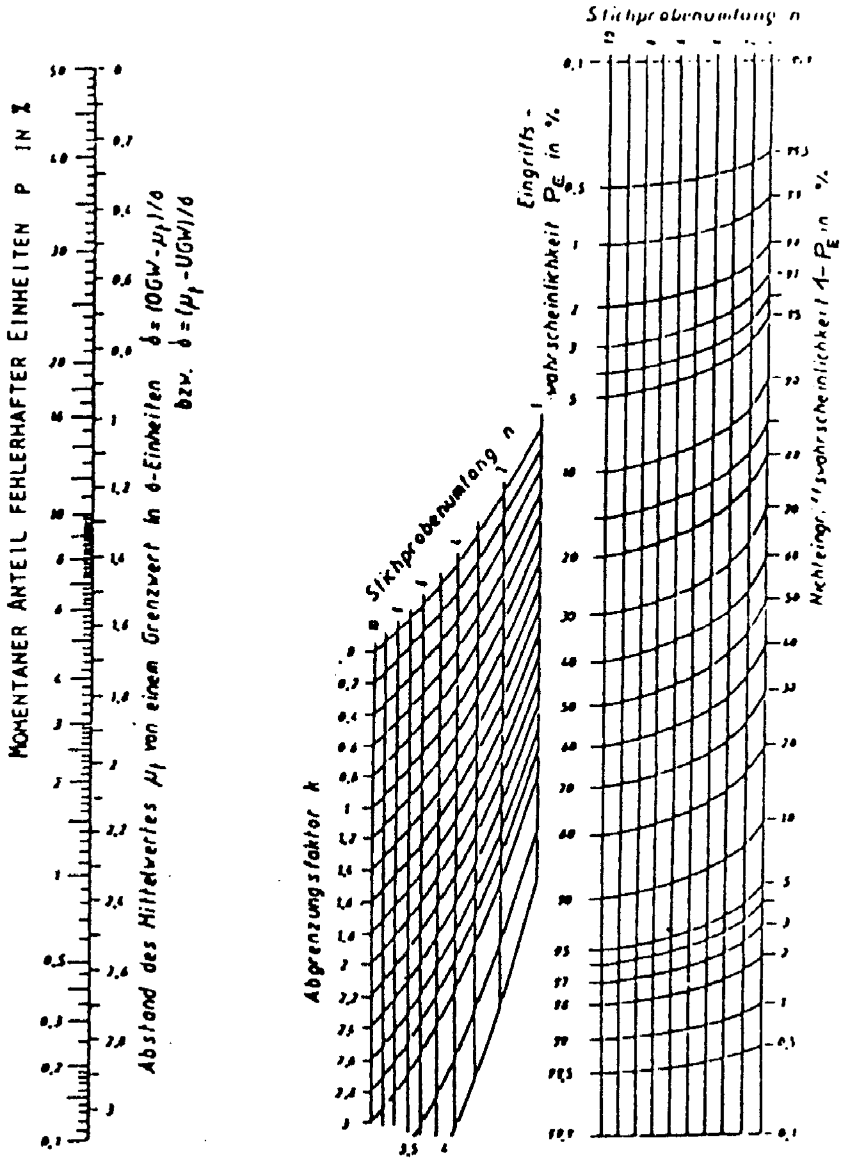
Erläuterung: Abschn. 6.2.3

Tabelle 7: FAKTOREN $u_{n\sqrt{L}}$ zur Berechnung der EINGRIFFSGRENZEN der URWERTKARTE mit vorgegebenen Grenzwerten

Eingriffs-wahrsch. P_E %		99	95	90	50	10	5	1
Nichteingriffs-wahrsch. L %		1	5	10	50	90	95	99
Stich-proben-umfang n	1	-2,326	-1,645	-1,282	0,000	1,282	1,645	2,326
	2	-1,282	-0,760	-0,476	0,545	1,633	1,955	2,575
	3	-0,787	-0,336	-0,090	0,819	1,819	2,122	2,712
	4	-0,478	-0,068	0,157	0,998	1,944	2,234	2,806
	5	-0,258	0,124	0,334	1,129	2,037	2,319	2,877
	6	-0,090	0,271	0,471	1,231	2,111	2,387	2,934
	7	0,045	0,390	0,582	1,315	2,172	2,445	2,982
	8	0,157	0,489	0,674	1,385	2,224	2,490	3,022
	9	0,252	0,573	0,753	1,446	2,269	2,532	3,058
	10	0,334	0,647	0,621	1,499	2,309	2,568	3,089

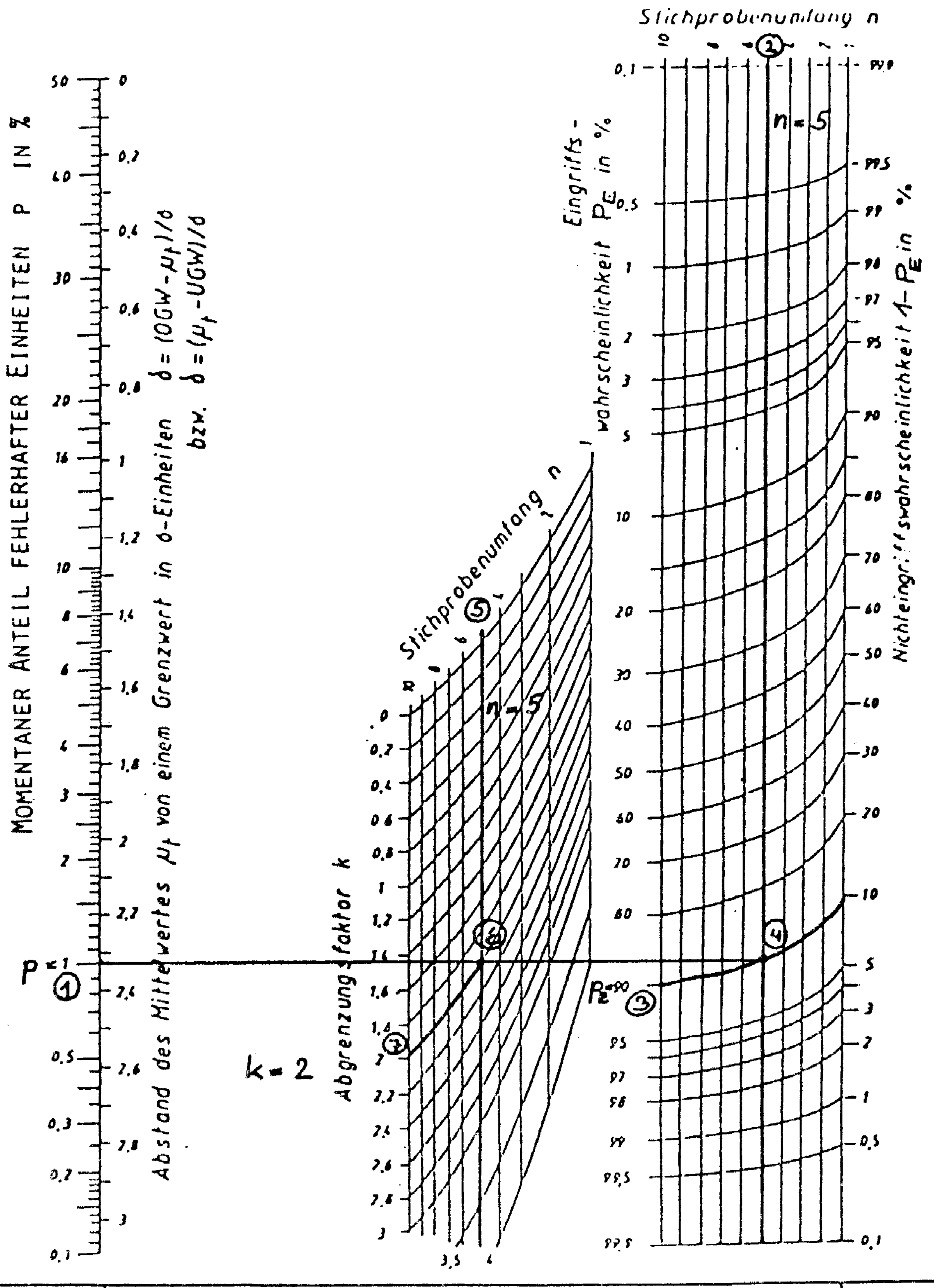
Erläuterung: Abschn. 6.4.2

Für den Anwender bietet das WILRICH-Nomogramm eine einfache Möglichkeit zur Bestimmung des Abgrenzungsfaktors k und damit bei bekannter Standardabweichung σ auch der Eingriffsgrenzen.



RK 6/16 — Nomogramm der x-Karte bei vorgegebenen Grenzwerten (Wilrich)

Auf der linken Skala markieren wir den Punkt (1) für p = 1 %.
Durch Schneiden der Kurven (2) für n = 5 und (3) für P_E = 90 % erhalten wir den Punkt (4).
Im linken Teil des Nomogramms markieren wir die Gerade (5) für n = 5.
Die Gerade durch die Punkte (1) und (4) schneidet die Gerade (5) im Punkt (6). Der Abgrenzungsfaktor k kann nun leicht abgelesen werden.



RK 6/16

Nomogramm der x-Karte bei vorgegebenen Grenzwerten (Wilrich)

Wir wollen uns nun näher mit dem Zusammenhang zwischen Verteilung der Meßwerte, Fehleranteil und Eingriffs- bzw. Nichteingriffswahrscheinlichkeit beschäftigen. Dabei setzen wir voraus, daß die Standardabweichung σ konstant ist und 0.1 mm beträgt.

Zuerst betrachten wir den Fall, daß der Mittelwert μ mit der Toleranzmitte M übereinstimmt.

Es gilt dann: $\mu = 105$ mm
$\sigma = 0.1$ mm

Der Fehleranteil beträgt dann:

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{Pr}(\text{Meßwert außerhalb der Toleranzgrenzen}) \\ &= 1 - \mathrm{Pr}(\text{Meßwert innerhalb der Toleranzgrenzen}) \\ &= 1 - \mathrm{Pr}(104.4 \leq X \leq 105.6) \\ &= 1 - (\mathrm{Pr}(x < 105.6) - \mathrm{Pr}(X \leq 104.4) \\ &= 1 - (F(105.6) - F(104.4) \\ &= 1 - (\Phi(6) - \Phi(-6)) \\ &= 1 - (2\Phi(6) - 1) \\ &= 1 - (2 * 0.999\,999\,999 - 1) = 0.000\,000\,002 \end{aligned}$$

$$\underline{p = 0.000\,000\,002}$$

Dabei bedeutet Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, die der Tabelle entnommen werden kann (siehe page 8).

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Meßwert innerhalb der Eingriffsgrenzen liegt, beträgt:

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathrm{Pr}(104.6 \leq X \leq 105.4) \\ &= \mathrm{Pr}(X < 105.4) - \mathrm{Pr}(X \leq 104.6) \\ &= F(105.4) - F(104.6) \\ &= \Phi(4) - \Phi(-4) \\ &= 2 * \Phi(4) - 1 \\ &= 2 * 0.99997 - 1 = 0.99994 \end{aligned}$$

$$\underline{P_1 = 0.99994}$$

Für die Nichteingriffswahrscheinlichkeit, das ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle 5 Meßwerte innerhalb der Eingriffsgrenzen liegen, gilt:

$$1 - P_E = (P_1)^5 = 0.99994^5 = 0.9997$$

Die Eingriffswahrscheinlichkeit beträgt in diesem Fall:

$$P_E = 1 - 0.9997 = 0.0003$$

$$\underline{P_E = 0.0003}$$

Bei optimaler Einstellung wird der Prozeß mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.03 % unterbrochen, obwohl ein Eingriff keine Verbesserung bewirken kann. Dieses Risiko ist der Preis für den geringen Prüfaufwand bei der Stichprobenprüfung.

Was passiert, wenn der Mittelwert μ um 1σ größer wird?

Dann gilt:

$$\mu = 105.1 \text{ mm}$$
$$\sigma = 0.1 \text{ mm}$$

Der Fehleranteil entspricht jetzt der Wahrscheinlichkeit, daß die obere Toleranzgrenze überschritten wird. Die untere Toleranzgrenze brauchen wir nicht zu berucksichtigen, da sie 7σ unter dem momentanen Mittelwert der Verteilung liegt.

$$\begin{aligned} p &= Pr(X > 105.6) \\ &= 1 - Pr(X \leq 105.6) \\ &= 1 - F(105.6) \\ &= 1 - \Phi(5) = 1 - 0.999\,999\,7 = 0.000\,000\,3 \end{aligned}$$

$$\underline{p = 0.000\,000\,3}$$

Auch jetzt ist der Fehleranteil noch vernachlässigbar klein. Er beträgt nur 0.000 03 % oder 0.3 ppm.[1]

Bei der Berechnung der Eingriffswahrscheinlichkeit können wir die untere Eingriffsgrenze vernachlässigen.

$$\begin{aligned} P_1 &= Pr(X \leq 105.4) \\ &= F(105.4) = \Phi(3) = 0.998\,65 \end{aligned}$$

$$1 - P_E = (P_1)^5 = 0.998\,65^{\,5} = 0.9933$$

$$P_E = 1 - 0.9933 = 0.0067$$

$$\underline{P_E = 0.0067}$$

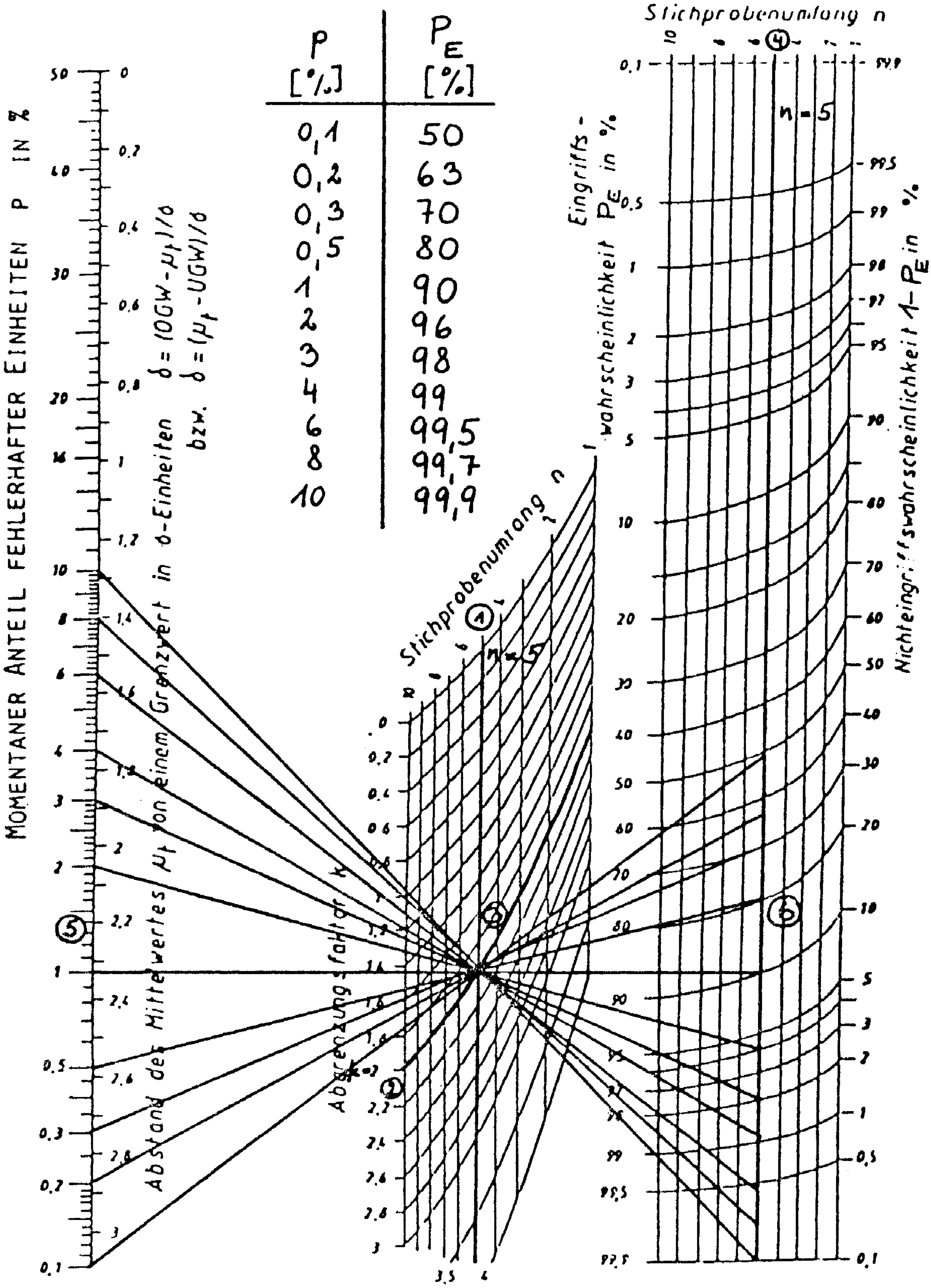
Die Berechnungen für andere Mittelwerte erfolgen analog.

Das WILRICH-Nomogramm bietet eine einfache Möglichkeit, die Eingriffs- und Nichteingriffswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Anteil fehlerhafter Einheiten zu bestimmen.

Die Kurven 1 für n = 5 und 2 fur k = 2 schneiden einander im Punkt 3. Rechts wird die Gerade 4 für n = 5 markiert.
Auf der linken Skala markieren wir einen Punkt 5 für den gewünschten Anteil fehlerhafter Einheiten.
Die Gerade durch die Punkte 5 und 3 schneidet die Gerade 4 im Punkt 6. Die Eingriffswahrscheinlichkeit P_E und die Nichteingriffswahrscheinlichkeit $1 - P_E$ können nun leicht abgelesen werden.

[1]ppm = parts per million = Anzahl fehlerhafter Einheiten pro einer Million Einheiten.

P [%]	P_E [%]
0,1	50
0,2	63
0,3	70
0,5	80
1	90
2	96
3	98
4	99
6	99,5
8	99,7
10	99,9



RK 6/16

Nomogramm der x-Karte bei vorgegebenen Grenzwerten (Wilrich)

Es ergibt sich folgender Zusammenhang:

μ [mm]	$\frac{\lvert\mu - M\rvert}{\sigma}$	p [%]	P_E [%]
105.00	0.0	0.000 000 2	0.03
105.05	0.5	0.000 002	0.12
105.10	1.0	0.000 03	0.67
105.15	1.5	0.000 3	3.07
105.20	2.0	0.003	10.87
105.25	2.5	0.02	29.23
105.30	3.0	0.14	57.85
105.35	3.5	0.62	84.19
105.40	4.0	2.27	96.87
105.45	4.5	6.68	99.72
105.50	5.0	15.87	99.99
105.55	5.5	30.85	99.999 9
105.60	6.0	50.00	99.999 999 4

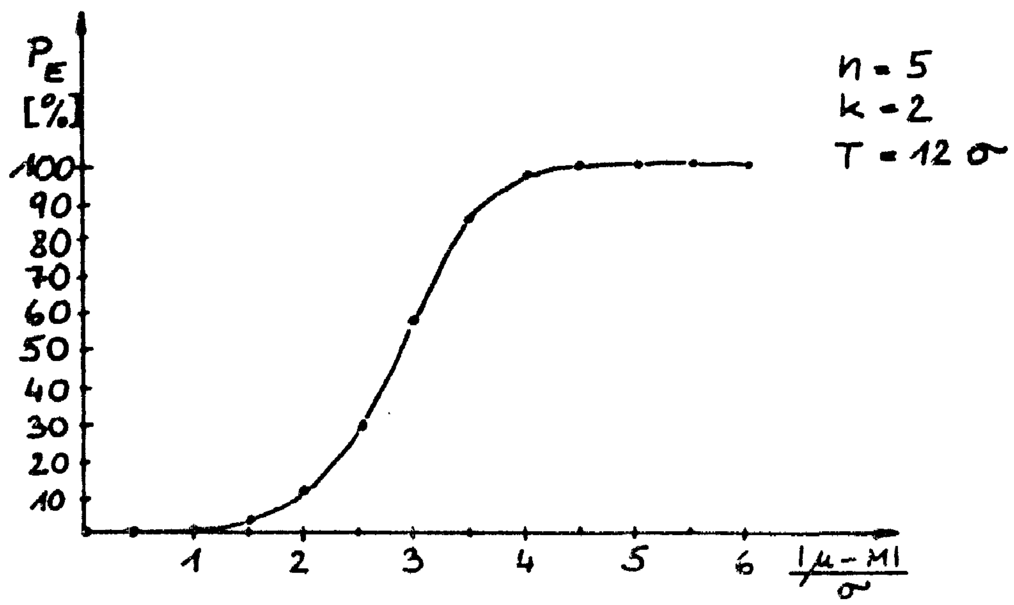
Bemerkung: Der Zusammenhang zwischen dem Fehleranteil p und der Eingriffswahrscheinlichkeit P_E hängt nur vom Stichprobenumfang n und vom Abgrenzungsfaktor k ab.

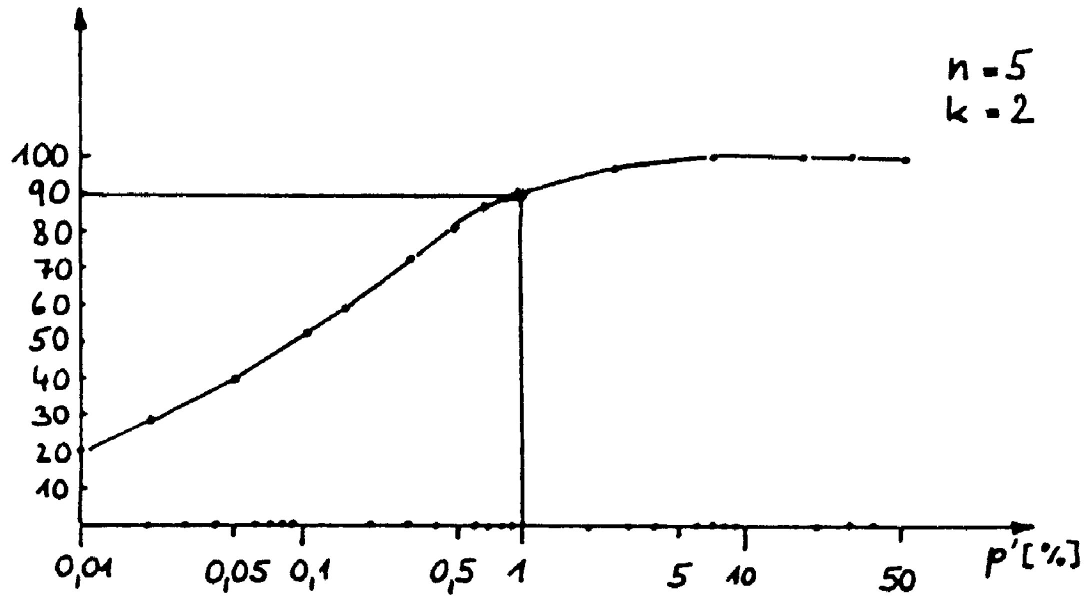
Obige Tabelle gilt für n = 5 und k = 2.

Der Zusammenhang zwischen der Verschiebung des momentanen Mittelwerts von der Toleranzmitte in σ-Einheiten $\frac{\lvert\mu - M\rvert}{\sigma}$ und der Eingriffswahrscheinlichkeit hängt darüber hinaus auch noch vom Verhältnis T/σ ab.

In obiger Tabelle gilt T/σ = 12.

Der Zusammenhang zwischen Mittelwertsverschiebung und Eingriffswahrscheinlichkeit und zwischen dem Fehleranteil und der Eingriffswahrscheinlichkeit ist in den folgenden beiden Abbildungen dargestellt. Dabei ist die Achse für den Fehleranteil logarithmisch geteilt.





Wir wollen nun den Einsatz der Qualitätsregelkarte mittels eines Rechners mit einem Zufallszahlengenerator simulieren. Wir nützen dabei die Tatsache aus, daß die Summen X von jeweils 10 gleichverteilten Zufallszahlen hinreichend genau einer Normalverteilung gehorchen.[1]

Der Mittelwert dieser Normalverteilung beträgt 5 * (b-a) und die Standardabweichung $\sqrt{10/12}$ * (b-a). Dabei ist a die kleinst- und b die größtmögliche der ursprünglichen gleichverteilten Zufallszahlen.

Die Größen (X - 5 * (b-a)) * $\sqrt{1.2}$ * σ / (b-a) + μ gehorchen dann einer Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ. Jeweils fünf dieser Größen stellen ein Stichprobenergebnis dar und werden in die Qualitätsregelkarte eingetragen.

Wiederholt man diesen Vorgang für mehrere Kombinationen von μ und σ, so lernt man den Einfluß des Mittelwerts und der Standardabweichung auf die Verteilung sehr anschaulich kennen.

Die folgenden Abbildungen zeigen die Simulation des Einsatzes von Qualitätsregelkarten für das Beispiel der Bolzenfertigung. Dabei variiert sowohl der Mittelwert μ als auch die Standardabweichung σ.

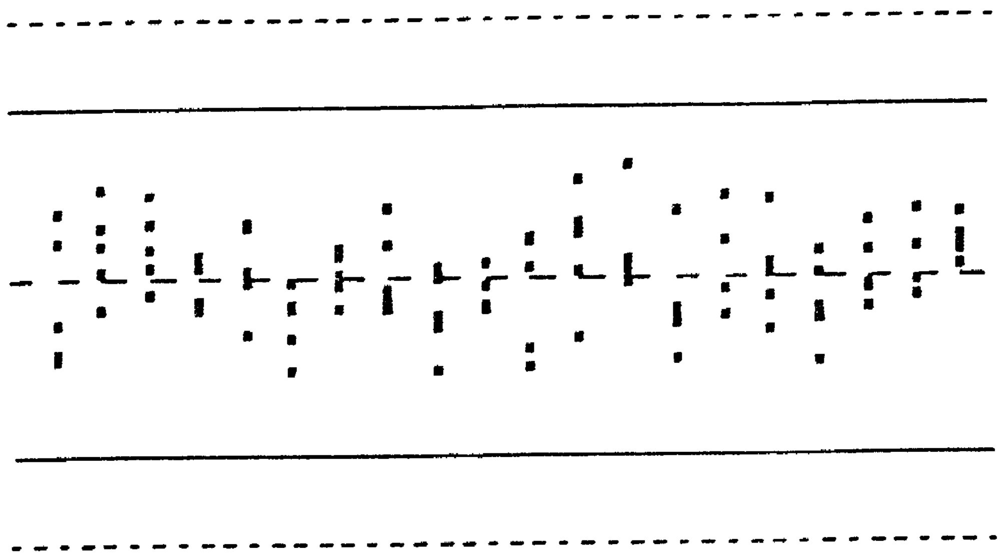
Ausdrücklich sei darauf hingewiesen, daß jede Überschreitung der Eingriffsgrenzen eine Neueinstellung der Maschine und damit eine Veränderung der Maßwertwertverteilung zur Folge hätte. Um die Abhängigkeit der Eingriffswahrscheinlichkeit von den Parametern der Verteilung zu zeigen, wird die Simulation in diesem Fall dennoch mit den gleichen Werten von μ und σ fortgesetzt.

Die angegebene "Eingriffswahrscheinlichkeit" ist ein empirischer Schätzwert. Er wird berechnet, indem man die Anzahl der Eingriffe durch die Anzahl der Stichproben dividiert und mit 100 % multipliziert. Trotz der kleinen Anzahl von Stichproben stimmen diese Schätzwerte mit den theoretisch ermittelten Werten der Eingriffswahrscheinlichkeit recht gut überein.

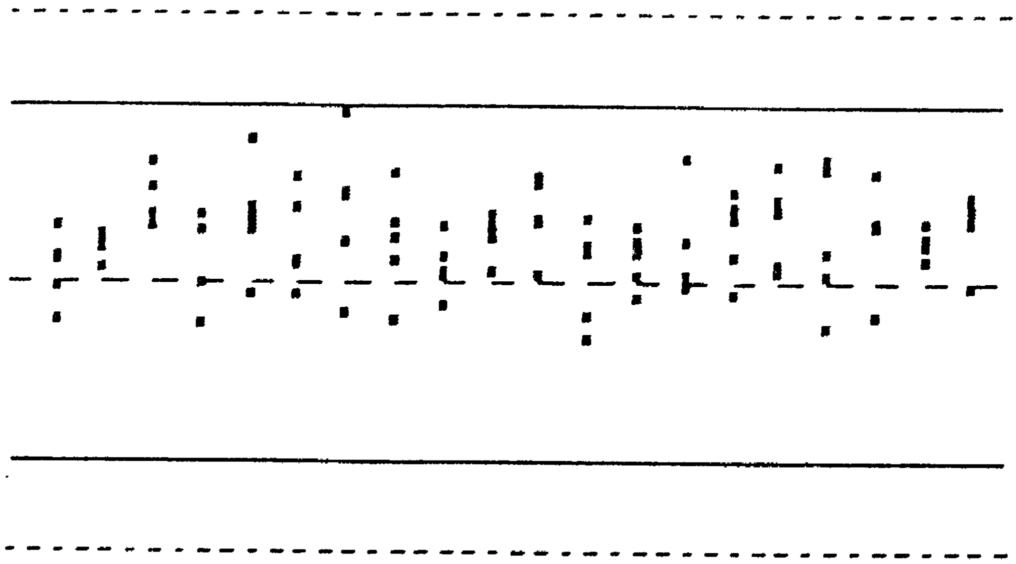
[1]Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes der Statistik.

Obere Toleranzgrenze : 105.6
Untere Toleranzgrenze : 104.4
Toleranzmitte : 105
Verschiebungsfaktor k : 2

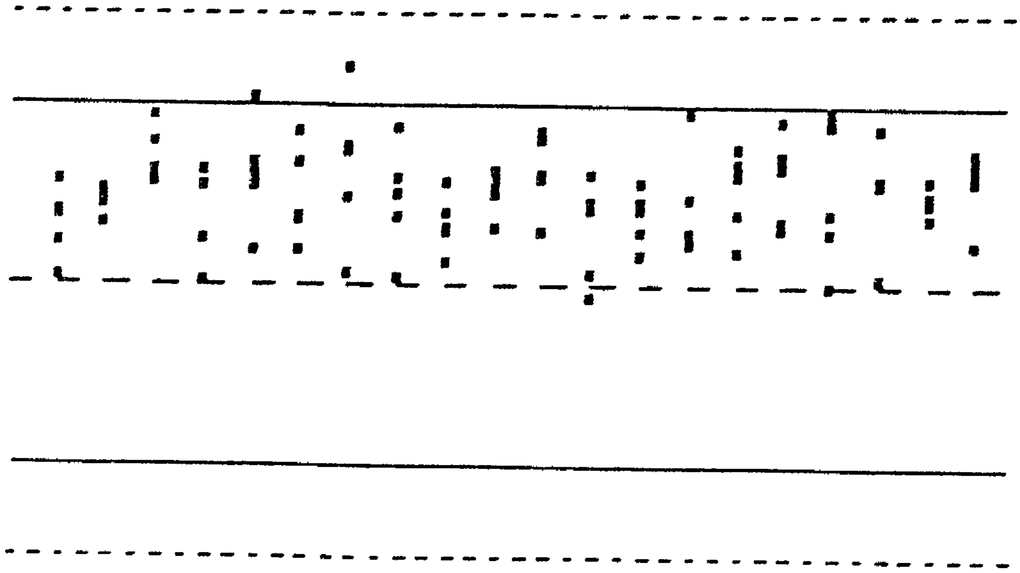
my : 105
sigma : .1
Anzahl der Eingriffe = 0
Eingriffswahrscheinlichkeit = 0 %



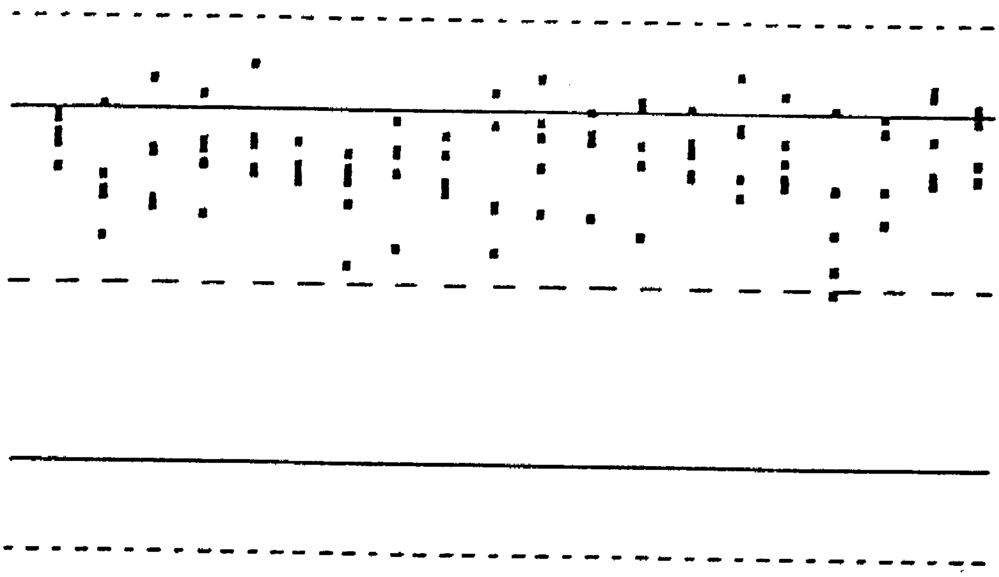
my : 105.1
sigma : .1
Anzahl der Eingriffe = 0
Eingriffswahrscheinlichkeit = 0 %



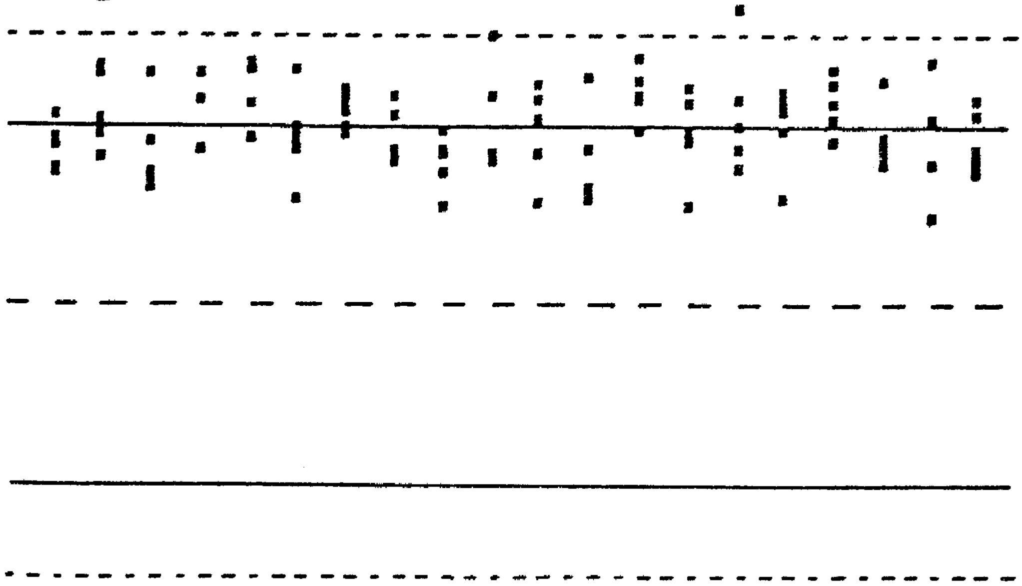
my : 105.2
sigma : .1
Anzahl der Eingriffe = 2
Eingriffswahrscheinlichkeit = 10 %



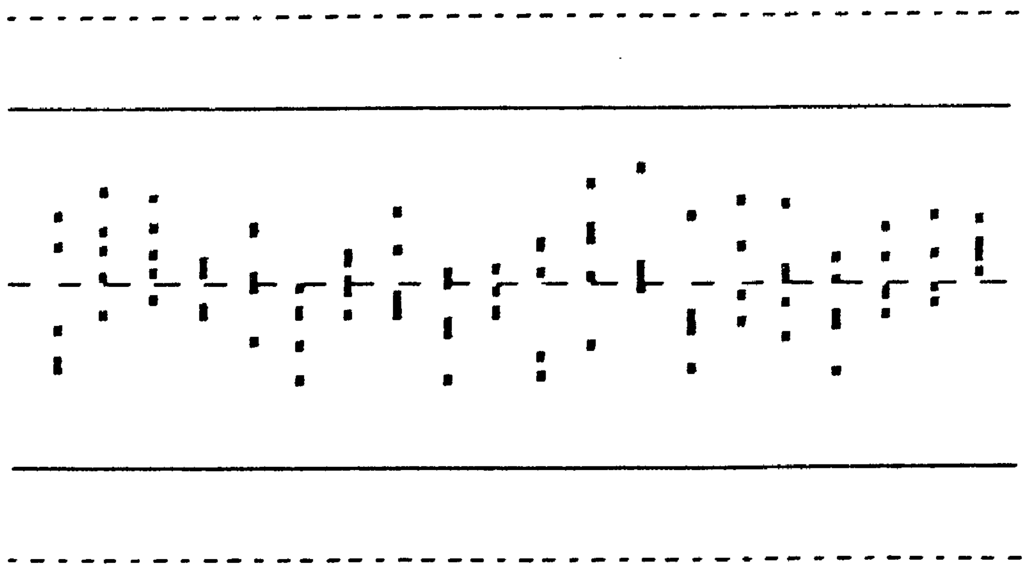
my : 105.3
sigma : .1
Anzahl der Eingriffe = 13
Eingriffswahrscheinlichkeit = 65 %



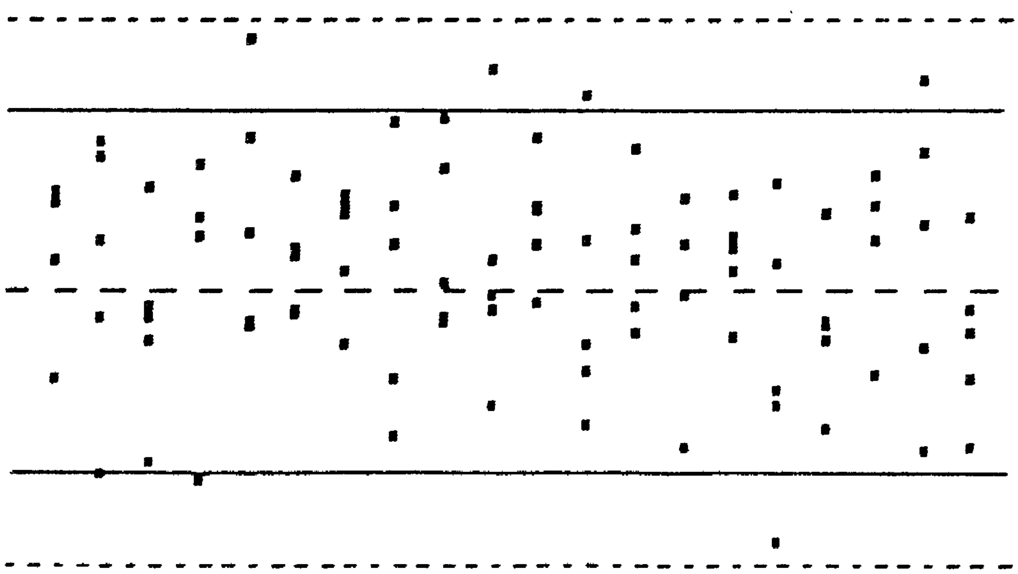
my : 105.4
sigma : .1
Anzahl der Eingriffe = 19
Eingriffswahrscheinlichkeit = 95 %



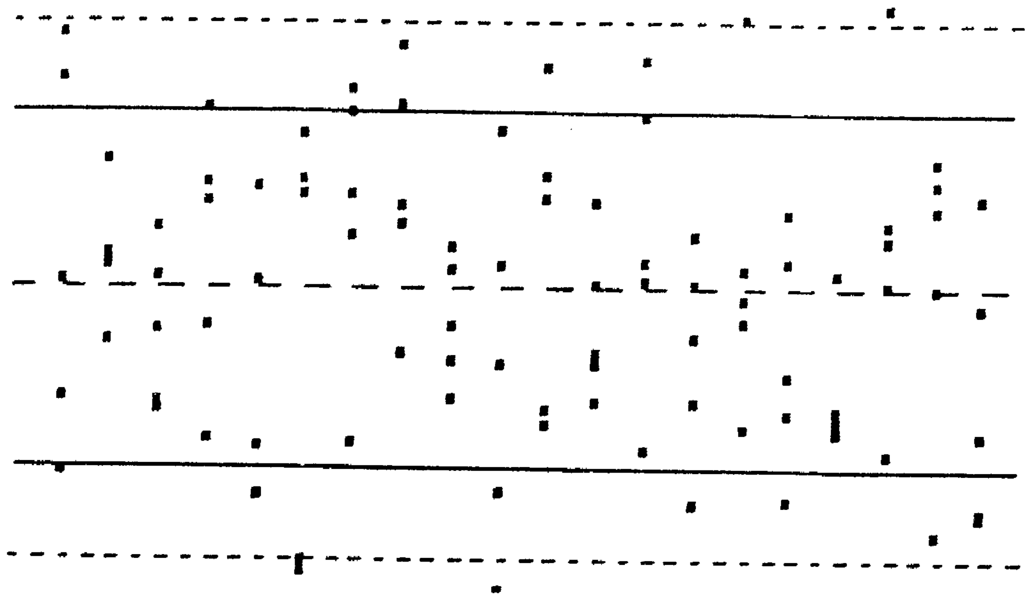
my : 105
sigma : .1
Anzahl der Eingriffe = 0
Eingriffswahrscheinlichkeit = 0 %



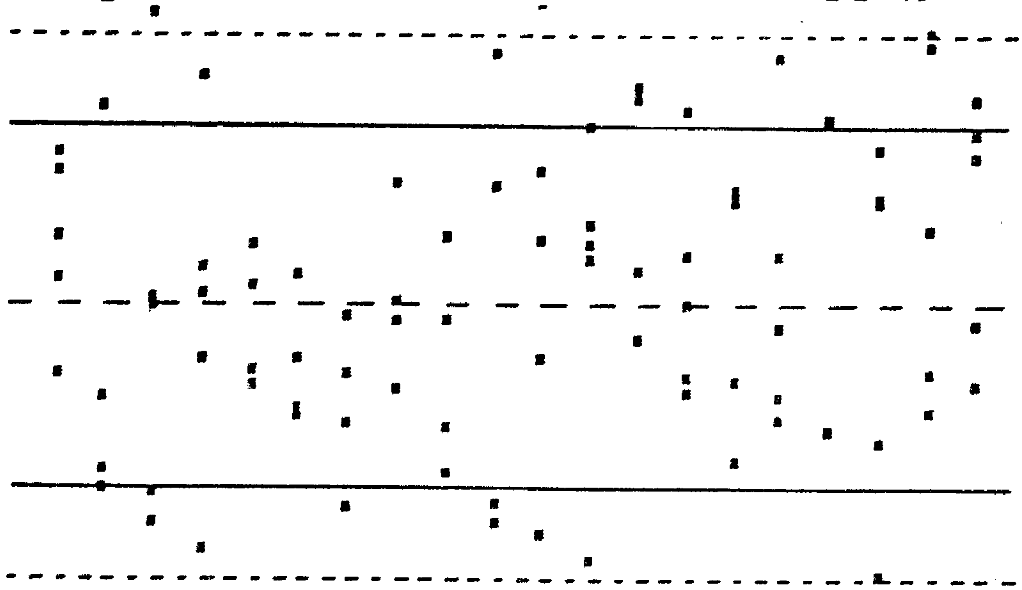
my : 105
sigma : .2
Anzahl der Eingriffe = 6
Eingriffswahrscheinlichkeit = 30 %



my : 105
sigma : .3
Anzahl der Eingriffe = 15
Eingriffswahrscheinlichkeit = 75 %



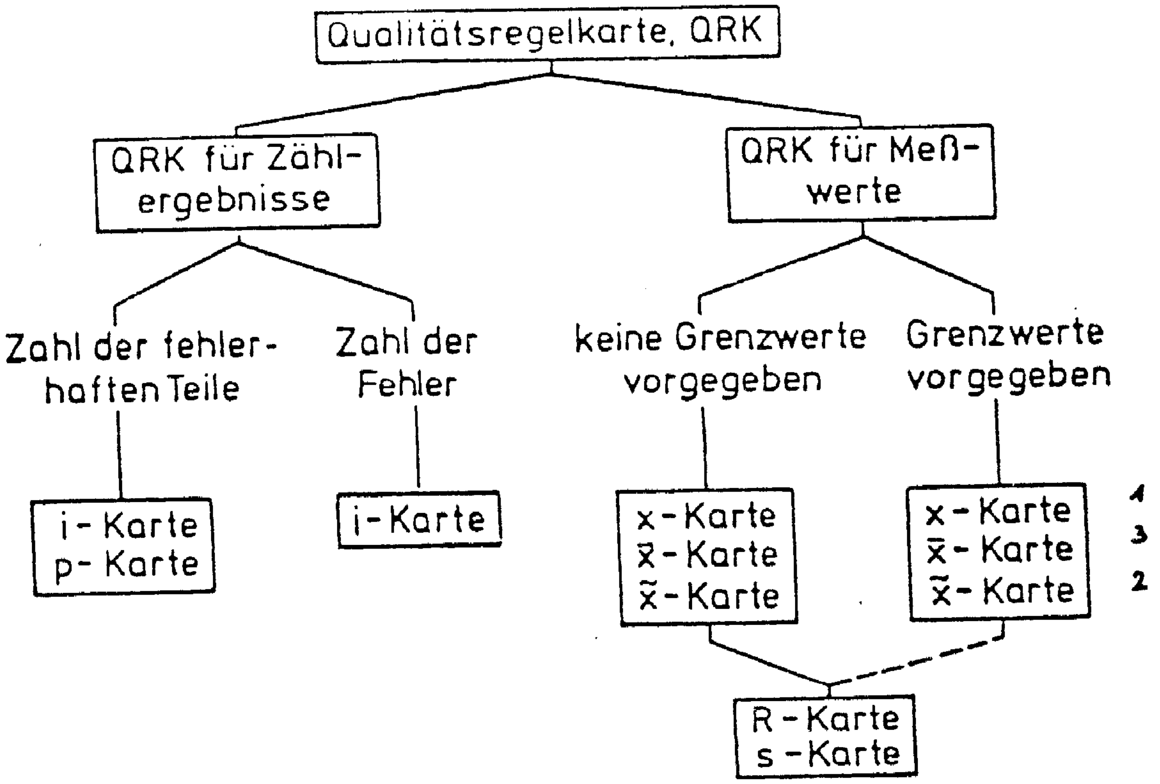
my : 105
sigma : .4
Anzahl der Eingriffe = 17
Eingriffswahrscheinlichkeit = 85 %



Die Simulation erfolgte auf einem SINCLAIR-QL-Rechner mittels des folgenden BASIC-Programms:

```
100 PAPER 0 : CLS : INK 7
110 INPUT 'Obere Toleranzgrenze   :'!ot
120 INPUT 'Untere Toleranzgrenze  :'!ut
130 mitte=(ot+ut)/2
140 INPUT 'Verschiebungsfaktor k  :'!k
150 REPeat regelkarte
160 INPUT 'my                     :'!my
170 INPUT 'sigma                  :'!sigma
180 ein=0
190 DIM y(5),u(5)
200 u(1)=ot : u(2)=ut : u(3)=ot-k*.1 : u(4)=ut+k*.1 : u(5)=mitte
210 FOR i = 1 TO 5
220 y(i)=(u(i)-105)*60+40
230 NEXT i
240 FOR i = 0 TO 82 STEP 2
250 LINE 2*i,y(2) TO 2*(i+1),y(2)
260 LINE 2*i,y(1) TO 2*(i+1),y(1)
270 NEXT i
280 LINE 0,y(3) TO 165,y(3);  165,y(4) TO 0,y(4)
290 FOR i = 0 TO 40 STEP 2
300 LINE 4*i,y(5) TO 4*(i+1),y(5)
310 NEXT i
320 FOR j = 1 TO 20
330 z=0
340 FOR l = 1 TO 5
350 xsum = 0
360 FOR i = 1 TO 10
370 xsum = xsum + RND : NEXT i
380 x = (xsum-5)*SQRT(1.2)*sigma+my
390 IF x>ot-k*.1 OR x<ut+k*.1THEN IF z=0 THEN z=z+1 : ein=ein+1
400 FILL 1
410 CIRCLE 8*j,(x-105)*60+40,1 : NEXT l
420 NEXT j
430 PRINT 'Anzahl der Eingriffe        ='!ein
440 PRINT 'Eingriffswahrscheinlichkeit ='!ein*5!'%'
450 FILL 0 : PAUSE : CLS
460 END REPeat regelkarte
```

Neben der hier behandelten Qualitätsregelkarte für normalverteilte Meßwerte bei vorgegebenen Toleranzgrenzen gibt es noch eine Vielzahl anderer Regelkarten. Die folgende Abbildung zeigt einen Überblick über die in der Qualitätssicherung üblichen Varianten.



All diese Qualitätsregelkarten dienen dem gleichen Zweck:

Mit ihrer Hilfe soll der Istzustand einer Fertigung mit dem Sollzustand verglichen und gleichzeitig dokumentiert werden.

Dabei kann der Sollzustand durch eine Toleranzvorgabe oder durch Erfahrungswerte der bisherigen Fertigung bestimmt sein.

Qualitätsregelkarten verbessern nicht die Qualität einer Produktion. Durch ihren Einsatz kann man jedoch Hinweise gewinnen, wann qualitätsfördernde Maßnahmen notwendig sind.

Besonders treffend ist dieser Sachverhalt in folgendem Slogan formuliert:

QUALITY CANNOT BE INSPECTED INTO A PRODUCT, IT HAS TO BE BUILT IN.

[1] sogenannte "Urwertkarten"
[2] sogenannte "Zentralwertkarten"
[3] sogenannte "Mittelwertkarten"

Die öVQ bietet im Rahmen ihres Seminarprogramms innerhalb des Blockes

"QUALITÄTSTECHNIK II"

jährlich einen einwöchigen Lehrgang über die Qualitätsregelkartentechnik an.

Der Lehrgangsblock Q II richtet sich hauptsächlich an Meister, sowie Absolventen Höherer Technischer Lehranstalten und Technischer Universitäten, die in der Industrie auf dem Gebiet der Qualitätssicherung arbeiten. Er umfaßt sechs einwöchige Seminare und hat die Anwendung der statistischen Methoden in der Qualitätssicherung auf einem mathematischen Schwierigkeitsniveau, das ungefähr dem dieses Artikels entspricht, zum Inhalt.

Die folgende Abbildung zeigt eine Übersicht über den Lehrgangsblock QUALITÄTSTECHNIK II :

Einführung in die statistischen Methoden der Qualitätssicherung
Stichprobensysteme
Qualitätsregelkarten
Auswertungsverfahren
Zuverlässigkeitsprüfung
Vorbereitung zur Prüfung Q II

P R Ü F U N G Q II

Nach bestandener Prüfung Q II besteht die Möglichkeit, einen zweiwöchigen Instruktorenlehrgang zu absolvieren. Ein positiver Abschluß dieses Lehrgangs berechtigt zur Führung des Titels "öVQ-Instruktor".

Derzeit gibt es neun öVQ-Instruktoren. Davon sind sechs - so auch die Verfasserin dieses Artikels - Professoren am Technologischen Gewerbemuseum in Wien.